編 者 的 話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　次

一　刘徽割圓术…… 3

二　抛物綫在坐标軸上所盖的面积…… 5

三　球的体积…… 8

四　正弦曲綫和坐标軸之間的面积……10

五　不同的分割法……13

六　自然对数……19

七　面积原理……27

八　祖暅原理……31

九　面积的近似計算……34

一〇　体积的近似計算……38

一一　結束語……43

附录　$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$的証明……45

一 刘徽割圓术

在华罗庚教授为这套小丛書所写的《从祖冲之的圓周率談起》一書中指出，一千四百年以前，祖冲之就已經知道了：

(i)圓周率 π 是在 3.1415926 和 3.1415927 之間；

(ii)用 $\frac{22}{7}$ 作为 π 的約率，用 $\frac{355}{113}$ 作为 π 的密率.

書中还指出："这些結果是刘徽割圓术之后的重要发展. 刘徽从圓內接正六边形起算，令边数一倍一倍地增加，即 12，24，48，96，…，1536，…，因而逐个算出六边形，十二边形，二十四边形，……的面积，这些数值逐步地逼近圓周率. 刘徽方法的特点，是得出一批一个大于一个的数值，这样来一步一步地逼近圓周率. 这方法是可以无限精密地逼近圓周率的，但每一次都比圓周率小."这段話精炼地說明了刘徽割圓术的本質.

刘徽，是我国古代的一个数学家，是魏末晋初时人，他在数学上的重大貢献是将我国最古的数学著作之一《九章算术》詳細整理(公元 263 年)，从此之后，这本書才有了定本. 他在注《九章算术》中求圓周率是用圓內接六边形起算，用他自己的原話来說是："割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与圓周合体而无所失矣."这个方法是他的創造，我們叫它做刘徽割圓术. 他算到正 192 边形，这时候 π 的近似值是 3.141024. 他的思想后来得到祖冲之父子的发揮，从而使我国古代的数学放出了异彩.

把刘徽的割圓术用数学語言写出来，就是：有一个半径是1的圆 O，作內接正六边形 $ABCDEF$（图1）。正六边形的面积是 $\triangle ABO$ 的面积的六倍。由于

$$AB=OA=1,\ OT=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以六边形的面积是

$$6\times\frac{1}{2}\times AB\times OT$$

$$=6\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

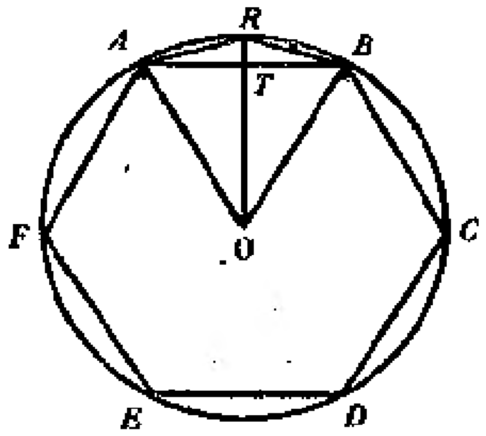


图 1.

再作內接正十二边形 $ARB\cdots\cdots$，于是四边形 $ARBO$ 的面积是

$$\frac{1}{2}\times OR\times AB=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2},$$

所以十二边形的面积是

$$6\times\frac{1}{2}=3.$$

同样可以算出二十四边形，四十八边形，……的面积。

或許有人認为：刘徽的这种想法沒有什么了不起。这种看法是不对的。我們无論如何不能低估刘徽的想法，因为它孕育了一个极其重要的思想。圓的面积是未知的，要求的；但是正多边形的面积是可求的，已知的。因之，刘徽想法的可貴，第一在于：怎样用已知的、可求的来逼近未知的、要求的。刘徽想法的可貴，第二在于：他把圓看做边数无穷的正多边形，而边数有限的正多边形的面积是已知的，可求的。也就是說，他用有限来逼近无穷。

这种想法，一直到近代数学中还在起着极其重要的作用，而且我們相信，它将永久起着极其重要的作用。何况刘徽在

一千七百年以前就用这种想法来解具体的数学問題，这有多么了不起呀！在这本小册子中，我們将自始至終貫穿着应用刘徽的思想，来处理一些面积和体积的問題.

二 抛物綫在坐标軸上所盖的面积

在中学数学里，我們遇到的面积往往只是直綫图形和圓的面积. 現在我們要对一些不属于上面說的范围的图形来寻求面积. 先从簡单的說起.

我們知道，

$$y=x^2$$

表示一根抛物綫(图2). 在OX軸上取一点C，設OC的长是a. 从C作垂直于OX軸的直綫，交抛物綫于A. 我們来求OAC的面积. 結果不是一下看得出来的，但是我們可以应用刘徽割圓术的思想，去找一个和它逼近的图形，而这个图形的面积是可以算得出来的. 如图3，我們把OC n等分，分点是

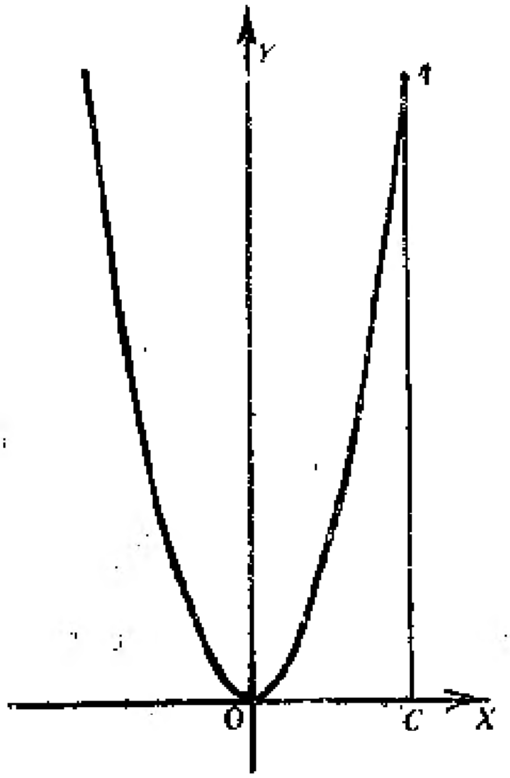
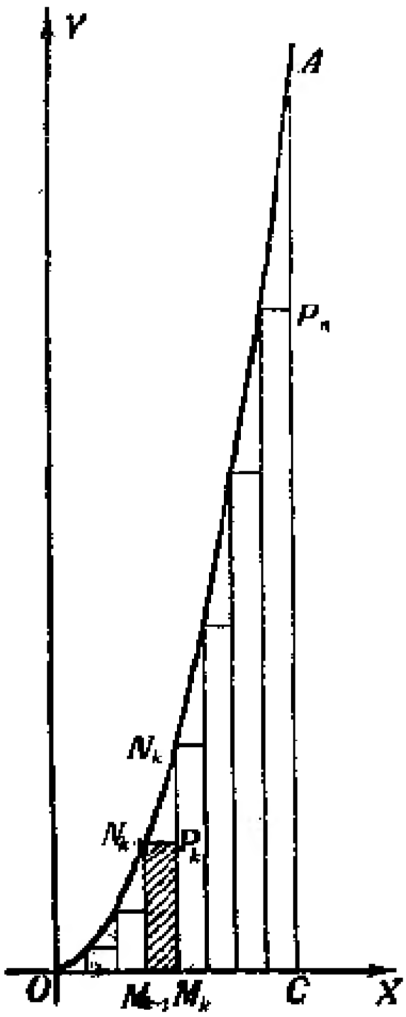


图 2.

$$(O=)M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{k-1}, M_k, \cdots, M_n(=C).$$

于是相邻二点的距离是$\frac{a}{n}$. 分别从这些分点$M_k, M_{k-1}, \cdots$作垂直于OX軸的直綫，交抛物綫于$N_k, N_{k-1}, \cdots$；从N_{k-1}作平行于OX軸的直綫，交M_kN_k于P_k；… 于是我們得到一个和



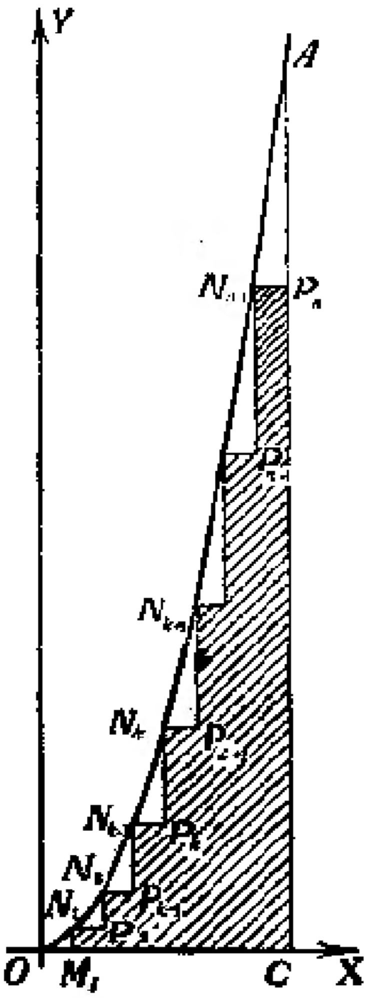


图 3.　　　　　　　　图 4.

OAC 相近似的图形，如图4，这个图形由直綫 OC，P_nC 和折綫

$$OM_1N_1P_2N_2\cdots P_{k-1}N_{k-1}P_kN_kP_{k+1}N_{k+1}\cdots P_{n-1}N_{n-1}P_n$$

所組成．这个图形的面积是可以算得出来的，因为它是由很多块矩形拼凑起来的．由于

$$y=x^2,$$

所以
$$M_{k-1}N_{k-1}=\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2,$$

因此矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$（見图 3）的面积是

$$\frac{a}{n}\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2,$$

所以整个近似图形的面积是

$$S_n=\frac{a}{n}\left[\left(\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{a^3}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2].$$

这里由 OC，P_nC 和折綫所組成的图形所起的作用就相当于刘徽割圆术中的正多边形。

利用楊輝三角中的公式，我們有①

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

于是作为 OAC 的面积 S 的近似值的 S_n 等于

$$\frac{a^3}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}),$$

显然 S_n 是小于 S 的，而且 n 越大，S_n 和 S 的差越小。如图 5，$M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 表示求 S_n 的一种分割所得的其中的一个矩形。把这种分割分得更細，例如在 $M_{k-1}M_k$ 的中間取一点 M'_{k-1}。从 M'_{k-1} 作 OX 軸的垂直綫，交抛物綫于 N'_{k-1}。从 N'_{k-1} 作平行于 OX 軸的直綫，交 M_kP_k 于 P'_k。又設 $M'_{k-1}N'_{k-1}$ 交 $N_{k-1}P_k$ 于 P'_{k-1}。于是在新的分割中，矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积应該用矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P'_{k-1}M'_{k-1}$ 和矩形 $M'_{k-1}N'_{k-1}P'_kM_k$ 的面积的和来代替。显然 $M_{k-1}N_{k-1}P'_{k-1}M'_{k-1}$ 和 $M'_{k-1}N'_{k-1}P'_kM_k$ 的面积的和比

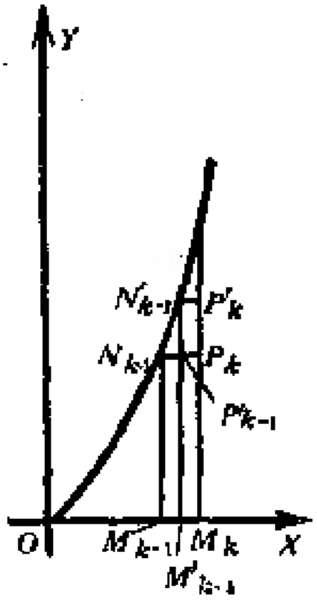


图 5.

① 参看这一套丛書中华罗庚：《从楊輝三角談起》，第四节例 2。

$M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$的大，也就是新的分割所得的近似面积比原来分割的更接近于S. 当n趋于无穷大时，S_n趋于$\frac{a^3}{3}$. 因之，得到OAC的面积S等于$\frac{a^3}{3}$.

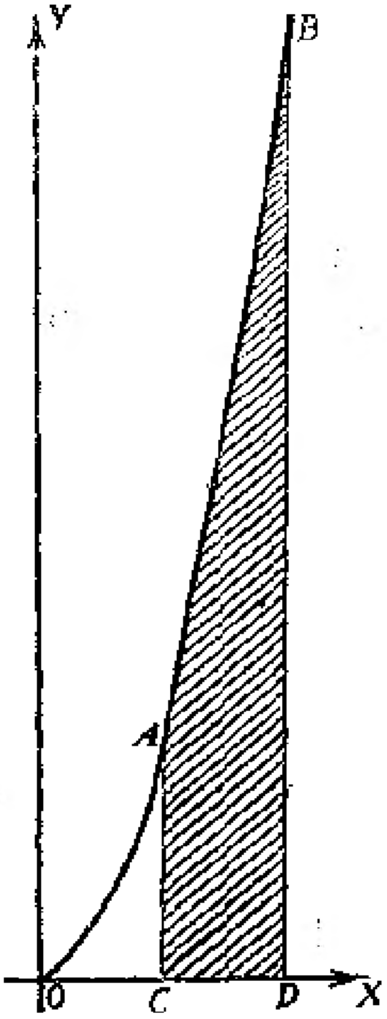


图 6.

不难看出，上面的做法和刘徽割圆术本質上是一样的，只是一个割的是圓，一个割的是抛物綫在OX軸上所盖的面积. 这种割的方法也是："割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与抛物綫合体而无所失矣."

从上面說的结果立刻知道，在OX軸上任取一段CD，这里

$OC=a$, $OD=b$, 而$a<b$（图 6），

从C，D分别作垂直于OX軸的直綫，交抛物綫于A，B，那末$ABDC$的面积是$\frac{1}{3}(b^3-a^3)$.

三　球的体积

利用跟上面相同的道理，我們还可以求得一些物体的体积. 現在来計算球的体积. 設球O的半徑是R（图 7）. 我們来考虑半球，得到結果后，加倍就是球的体积. 用一系列平行于半球的底的平面把半球切成等高的n片，使每片的厚度是$\frac{R}{n}$. 每一片的精确的体积还是不便于計算的，但当片切得很薄时，可以把这一片用一个圓柱体来近似它. 对于第k片来

講，設它的上底的半径是 r_{k-1}，下底的半径是 r_k。作一个跟它近似的圓柱体，高是 $\frac{R}{n}$，底半径是 r_k。于是这样一个半球就可以用一个由 n 个薄的圓柱体所組成的物体来替代了．这个物体的每一片的体积是

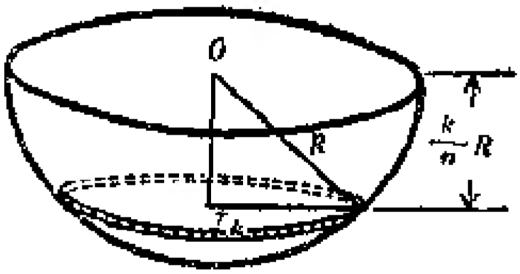


图 7.

$$\pi r_k^2 \frac{R}{n}.$$

但是 $r_k^2=R^2-\frac{k^2}{n^2}R^2$，所以这个近似于半球的物体的体积是

$$S_n=\frac{\pi R^3}{n}\left[\left(1-\frac{1^2}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)+\left(1-\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$=\pi R^3-\frac{\pi R^3}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\right).$$

而 $$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

所以 $$S_n=\pi R^3\left[1-\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right],$$

从直观上可以看出，这种分割的方法，也是"割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与球合体而无所失矣"．所以当 n 趋于无穷大时，S_n 就趋于半球的体积，而从 S_n 的表达式可以看出，这是

$$\frac{2\pi R^3}{3}.$$

所以全球的体积是 $\frac{4\pi R^3}{3}$.

說起球的体积还应当提到，在刘徽以前已經知道大約是

$$\frac{9}{2}R^3,$$

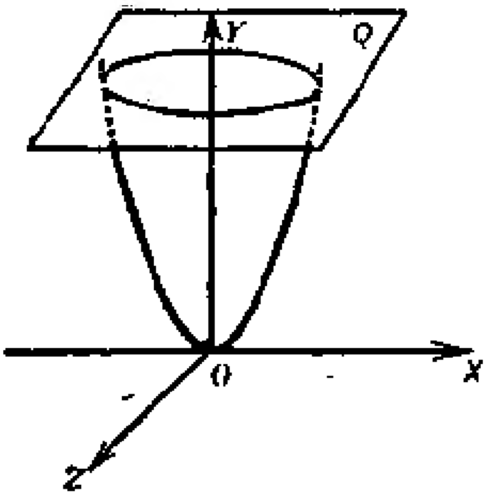


图 8.

但刘徽認为这个数値“偶与实相近，而丸犹伤多耳”，就是說，这个数值只和实际相近，但还嫌太多．之后祖冲之的儿子祖暅就在刘徽工作的基础上，精确地求得了球的体积，他的方法叫做“祖暅开立圓术”，不在这里詳細說了．

讀者可以利用上面說的方法，求得圓錐体的体积是$\frac{\pi r^2 h}{3}$，这里 r 是圓錐体底的半径，h 是圓錐体的高．如果把第二节中的拋物綫用 OY 軸做軸旋轉，得到旋轉拋物面，再作一个垂直于 OY 軸的平面 Q，如图 8．我們可以应用上面的方法，求出 Q 和旋轉拋物面之間所包的体积．

四　正弦曲綫和坐标軸之間的面积

并不是所有求面积或体积的問題都像上二节所作的那末簡单．事实上，事情往往要复杂得多．这里我們举一个比上二节复杂一些的例．

我們知道 $y=\sin x$ 所描繪的曲綫叫做正弦曲綫，如图 9．現在求 $x=0$ 到 $x=\pi$ 之間正弦曲綫和 OX 軸之間所包的面积．也跟以前一样，把 OX 軸上从 0 到 π 的一段 n 等分，分点是

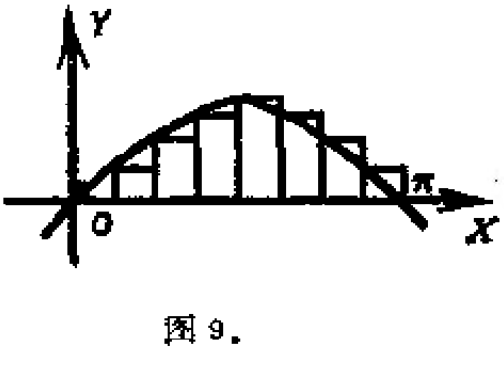


图 9.

$$0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \cdots, \frac{n\pi}{n}.$$

跟以前一样，从这些分点作垂直于 OX 軸的直綫，把图形分成 n 条，每一条可以用矩形来近似它，于是得到第 k 块的近似面积是

$$\frac{\pi}{n}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}.$$

由这 n 块矩形拼起来的图形跟正弦曲綫和 OX 軸之間所包的图形相逼近．而这图形的面积是

$$S_n = \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

我們来計算上面的和式．由于

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B),$$

于是

$$2S_n\sin\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}\left(2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} + 2\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n} + \cdots\right.$$
$$\left. + 2\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$
$$= \frac{\pi}{n}\left[\left(\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{3\pi}{2n}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{2n} - \cos\frac{5\pi}{2n}\right)\right.$$
$$\left. + \cdots + \left(\cos\frac{(2n-3)\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right).$$

但 $$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$

所以 $$2S_n\sin\frac{\pi}{2n} = \frac{2\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n} = \frac{2\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

因而 $$S_n = \frac{\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

即使到了这一步，結果还不是显然的，尽管我們知道 S_n 是小

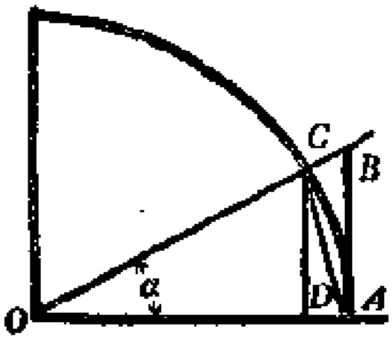


图 10.

于 S 的，而且当 n 增大时跟 S 越来越接近。

为了把 S 計算出来，我們先来給出一些准备知識。

我們取半径是 1 的圓，取角 α 适合 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。如图 10，可以看出：$\triangle OAB$ 的面积大于扇形 OAC 的面积，而扇形 OAC 的面积大于 $\triangle OAC$ 的面积。但 $\triangle OAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$，扇形 OAC 的面积是 $\frac{1}{2}\alpha$，$\triangle OAC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sin\alpha$，

因之，
$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha>\frac{1}{2}\alpha>\frac{1}{2}\sin\alpha,$$
这就是
$$\frac{1}{\sin\alpha}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$
或
$$1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha.$$
当 α 趋于零时，上面这个不等式的右边趋于 1，所以当 α 趋于零时，$\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 趋于 1。

从上面这个結果，我們就知道，当 n 无限增大时，
$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}$$
是趋于 1 的。

有了这个作准备，立刻可以看出，由于
$$S_n=\frac{\frac{\pi}{n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}=\frac{2\cdot\frac{\pi}{2n}\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$
所以当 n 趋于无穷大时，S_n 趋于 2，而这就是我們要求的面积。

五　不同的分割法

上面我們都把 OX 軸上的距离等分，然后来进行計算．但是有的时候，应用等分来計算反而很困难． 通过以下的例子，可以更清楚地了解这一点．

我們提出一个比第二节中所提出的更一般的問題，来研究曲綫 $y=x^m$ 盖在 OX 軸上的面积，这里 m 是不等于 -1 的实数，如图 11．

如果也像上几节那样等分，設 OD 的长是 b，OC 的长是 a，并且 $a<b$，我們把 CD 分成 n 等分，每一段的距离是 $\frac{b-a}{n}$． 如同第二节中的方法作 n 块矩形，拼凑起来作为 $ABDC$ 的近似图形． 在求这近似图形的面积的过程中，要遇到求以下的和

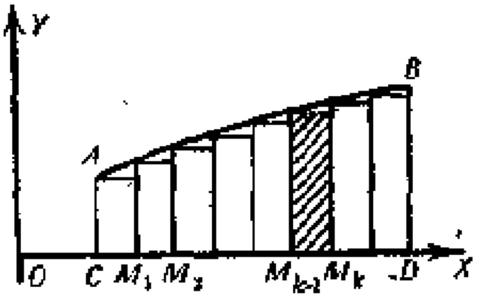


图 11．

$$1^m+2^m+\cdots+n^m,$$

而这个值当 m 是正整数时，例如 $m=3,4,\cdots$，我們还可以利用楊輝三角中的一些公式求出来，但已經是很吃力的事了；至于 m 不是整数时，要写出这个和的具体表达式是十分困难的． 因之，我們必須另想别的办法． 事实上，我們在开头二节中已經看到，刘徽割圓时，是用正多边形来作为圓的近似图形的，而在求拋物綫在 OX 軸上所盖的面积时，就用很多矩形拼凑起来的折綫图形作为近似图形了． 因之，不同的分割方法应該是被允許的． 我們可以不一定把 OX 軸上的距离等分然

后来进行計算.

我們記 $q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$,显然,由于 $b>a$,所以 $q>1$. 但是当 n 趋于无穷时,q 是趋于1的,这是因为

$$\log q=\frac{\log b-\log a}{n},$$

而 $\frac{\log b-\log a}{n}$ 当 n 趋于无穷时,显然是趋于零的,所以 q 趋于1.

現在把 OD 分成 n 段,分点是

$$(O=)M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n(=D).$$

这些分点是这样取的,讓

$$OM_1=aq,\ OM_2=aq^2, \cdots,\ OM_n=aq^n.$$

于是

$$\begin{aligned}
M_1O&=a(q-1),\\
M_2M_1&=aq(q-1),\\
M_3M_2&=aq^2(q-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_kM_{k-1}&=aq^{k-1}(q-1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
M_nM_{n-1}&=aq^{n-1}(q-1).
\end{aligned}$$

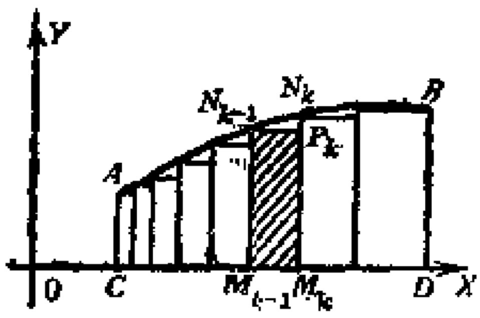


图 12.

这样一来,OD 之間并不是等分了,而是越靠近 O 的分得越小,越靠近 D 的分得越大(图 12). 但是当分点越来越多时,就是越分越細时,每一段的长都趋于零.

照这样分割以后,矩形

$M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积是

$$aq^{k-1}(q-1)(aq^{k-1})^m=(q-1)(aq^{k-1})^{m+1}.$$

把这些矩形拼凑起来得到的图形成为 $ABDC$ 的近似图形，这个近似图形的面积是

$$\begin{aligned}S_n&=(q-1)(aq^{1-1})^{m+1}+(q-1)(aq^{2-1})^{m+1}\\&\qquad+\cdots+(q-1)(aq^{n-1})^{m+1}\\&=(q-1)a^{m+1}[1+q^{m+1}+\cdots+(q^{m+1})^{n-1}]\\&=(q-1)a^{m+1}\frac{q^{(m+1)n}-1}{q^{m+1}-1}.\end{aligned}$$

但是 $q^n=\frac{b}{a}$，所以

$$S_n=a^{m+1}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{\frac{q^{m+1}-1}{q-1}}=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{\frac{q^{m+1}-1}{q-1}}.$$

显然 S_n 是小于 $ABDC$ 的面积 S 的，而且可以看出，这个近似图形也是“割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与曲綫合体而无所失矣”.

为了要求得 S 的值，我們必須考慮当 n 趋于无穷时的 S_n 的值。这就要求当 n 趋于无穷时 $\frac{q^{m+1}-1}{q-1}$ 的值。前面我們已經說过，当 n 趋于无穷时，q 就趋于 1，于是我們要求的是

$$\lim_{q\to1}\frac{q^{m+1}-1}{q-1}$$

的值，但 $m\neq-1$.

为了計算这个值，我們設

$$q-1=t,$$

即

$$q=1+t,$$

由于 $q>1$，所以 $t>0$ 成立。当 q 趋于 1 时，t 就趋于零。因

而，我們要求的值是

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{m+1}-1}{t}.$$

为了要求得上面这个数值，我們分几步来进行。

（1）先証：如果 $m\geqslant 0$，那末

$$(1+t)^{m+1}\geqslant 1+(m+1)t.$$

設 m 是有理数，于是 $\frac{1}{m+1}$ 可以写成 $\frac{r}{s}$，这里 r, s 是正整数。由于 $m\geqslant 0$，$\frac{1}{m+1}\leqslant 1$，所以 $r\leqslant s$。因之，$[1+(m+1)t]^{\frac{1}{m+1}}$ 可以写成

$$\sqrt[s]{\underbrace{[1+(m+1)t]\cdots[1+(m+1)t]}_{r\text{个}}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{s-r\text{个}}}.$$

由于几何平均不大于算术平均，所以上式不大于

$$\frac{r[1+(m+1)t]+(s-r)}{s}=1+\frac{r}{s}(m+1)t=1+t,$$

于是得到

$$[1+(m+1)t]^{\frac{1}{m+1}}\leqslant 1+t.$$

而这就是 $$(1+t)^{m+1}\geqslant 1+(m+1)t.$$

因之，当 m 是有理数时，我們証明了(1)。当 m 是无理数时，我們可以找到一串有理数 $m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots$，用 m 做它們的极限，而且每一个 $m_n\geqslant 0$，于是由剛才所証的，对于每一个 m_n，

$$(1+t)^{m_n+1}\geqslant 1+(m_n+1)t$$

都成立，在上式中，讓 $m_n\to m$，就得到（1）。

（2）再証：如果 $m\leqslant -2$，$1\geqslant t\geqslant 0$，那末

$$(1+t)^{m+1}\geqslant 1+(m+1)t.$$

由于 $m\leqslant -2$，所以 $m+1\leqslant -1$。先設 m 是有理数，于

是$\frac{-1}{m+1}$可以写成$\frac{r}{s}$，而$r\leqslant s$。

若 $1+(m+1)t\leqslant 0$，那末就沒有什么可証明的了，因为$(1+t)^{m+1}>0$永远成立。若 $1+(m+1)t>0$，于是如同(1)中所証的那样，

$$[1+(m+1)t]^{\frac{r}{s}}\leqslant\frac{r[1+(m+1)t]+(s-r)}{s}=1+\frac{r}{s}(m+1)t$$
$$=1-t.$$

但是
$$1-t\leqslant\frac{1}{1+t}$$
显然成立，因之，

$$[1+(m+1)t]^{\frac{r}{s}}\leqslant\frac{1}{1+t}.$$

而这就是

$$1+(m+1)t\leqslant\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{s}{r}}=\left(\frac{1}{1+t}\right)^{-(m+1)}=(1+t)^{m+1},$$

这也就是(2)。因之，当m是有理数时証明了(2)成立。至于m是无理数时，也可以同(1)那样証明(2)成立。

(3)再証：如果$m\geqslant 0$或$m\leqslant -2$，那末当$\frac{1}{|m+1|}>t\geqslant 0$时，

$$\frac{1}{1-(m+1)t}\geqslant(1+t)^{m+1}\geqslant 1+(m+1)t$$

成立。

(3)的右边的不等式就是(1)和(2)，現在来証左边的不等式。

設 $m\geqslant 0$，那末 $-m\leqslant 0$，于是 $-m-2\leqslant -2$，記$m'=-m-2$，于是由(2)，当 $1\geqslant t\geqslant 0$时，我們有

$$(1+t)^{m'+1}\geqslant 1+(m'+1)t,$$

这就是
$$(1+t)^{-m-1}\geqslant 1-(m+1)t,$$

也就是 $$\frac{1}{(1+t)^{m+1}}\geqslant 1-(m+1)t.$$

由于 $t<\frac{1}{m+1}$，所以 $1-(m+1)t>0$，因之，就得到：

$$\frac{1}{1-(m+1)t}\geqslant(1+t)^{m+1};$$

这就是(3)的左边的不等式．同样可以証明，当 $m\leqslant -2$ 时，(3)的左边的不等式也成立．

(4)当 $m\geqslant 0$，或 $m\leqslant -2$，和 $\frac{1}{m+1}>t\geqslant 0$ 时，从(3)式中各减 1，再除以 t，就得到：

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-(m+1)t}-1\right)\geqslant\frac{(1+t)^{m+1}-1}{t}\geqslant m+1,$$

而这就是

$$\frac{m+1}{1-(m+1)t}\geqslant\frac{(1+t)^{m+1}-1}{t}\geqslant m+1,$$

由于

$$\lim_{t\to 0}\frac{m+1}{1-(m+1)t}=m+1,$$

所以我們在上式取 t 趋于零时的极限，左右二边都是 $m+1$，因之得到

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{m+1}-1}{t}=m+1.$$

(5)当 $-2\leqslant m\leqslant 0$ 时，由于 $m+2\geqslant 0$，所以由(3)得到，当 $\frac{1}{m+3}>t\geqslant 0$ 时，

$$\frac{1}{1-(m+3)t}\geqslant(1+t)^{m+3}\geqslant 1+(m+3)t$$

成立，上式各除以 $(1+t)^2$，就得到

$$\frac{1}{[1-(m+3)t](1+t)^2}\geqslant(1+t)^{m+1}\geqslant\frac{1+(m+3)t}{(1+t)^2},$$

于是在上式中各减 1，再除以 t，得到

$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{[1-(m+3)t](1+t)^2}-1\right) \geqslant \frac{(1+t)^{m+1}-1}{t}$$

$$\geqslant \frac{1}{t}\left(\frac{1+(m+3)t}{(1+t)^2}-1\right).$$

这就是

$$\frac{m+1+(2m+5)t+(m+3)t^2}{[1-(m+3)t](1+t)^2} \geqslant \frac{(1+t)^{m+1}-1}{t} \geqslant \frac{m+1-t}{(1+t)^2},$$

由于上式左右二边当 t 趋于零时的极限都是 $m+1$，立刻得到，当 $-2 \leqslant m \leqslant 0$ 时，

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{m+1}-1}{t} = m+1.$$

总結起来，我們得到，

$$\lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{m+1}-1}{t} = m+1$$

永远成立.

因之，最后我們得到，当 $m \neq -1$，n 趋于无穷大时，S_n 趋于 $ABDC$ 的面积 S，它等于

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

作为上面說的結果的推論，当 $m<-1$ 时，我們把 D 点沿 OX 軸推向无穷(图 13)，那末这一块伸向无穷的(由阴影所示的)图形的面积应該是存在的，并且等于

$$-\frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

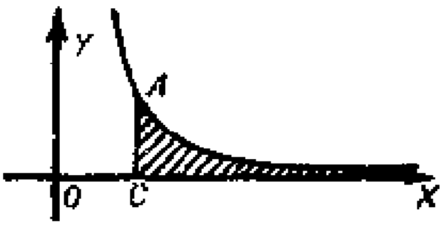


图 13.

六 自然对数

在上一节中，$m=-1$ 的情形是除外了的，因为当 $m=-1$ 时，卽使使用上面說的分割方法，仍旧不能得到什么結果. 我

們現在来仔細地研究一下当 $m=-1$ 时的情形.

在这时候曲綫是 $y=\frac{1}{x}$，图象如图14.

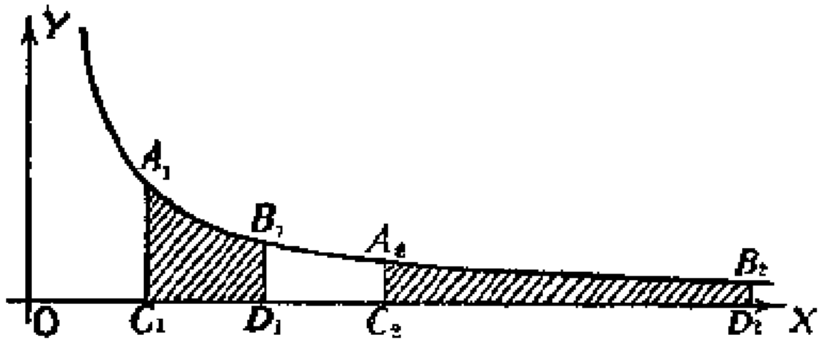


图 14.

在 OX 軸上取二段綫段 C_1D_1 和 C_2D_2，設 OC_1 的长是 a_1，OD_1 的长是 b_1，OC_2 的长是 a_2，OD_2 的长是 b_2，我們可以看到：如果 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$，那末 $A_1B_1D_1C_1$ 的面积等于 $A_2B_2D_2C_2$ 的面积.

事实上，我們把 C_1D_1 n 等分，跟以往一样，作一个由很多矩形拼凑起来的图形作为 $A_1B_1D_1C_1$ 的近似图形，这个近似图形的面积是

$$\frac{b_1-a_1}{n}\left[\frac{1}{a_1+\frac{b_1-a_1}{n}}+\frac{1}{a_1+2\frac{b_1-a_1}{n}}+\cdots+\frac{1}{a_1+n\frac{b_1-a_1}{n}}\right]$$

$$=\left(\frac{b_1}{a_1}-1\right)\left[\frac{1}{n-1+\frac{b_1}{a_1}}+\frac{1}{n-2+2\frac{b_1}{a_1}}+\cdots+\frac{1}{n\frac{b_1}{a_1}}\right].$$

同样把 C_2D_2 n 等分，跟以往一样，作一个由很多个矩形拼凑起来的图形作为 $A_2B_2D_2C_2$ 的近似图形，显然这个近似图形的面积是

$$\left(\frac{b_2}{a_2}-1\right)\left[\frac{1}{n-1+\frac{b_2}{a_2}}+\frac{1}{n-2+2\frac{b_2}{a_2}}+\cdots+\frac{1}{n\frac{b_2}{a_2}}\right].$$

如果 $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$，那末显然这二个近似图形的面积是完全相同的. 因之，作为它們所逼近的图形 $A_1B_1D_1C_1$ 和 $A_2B_2D_2C_2$ 的面

积当然也是相等的了.

我們把 $F(z)$ 定义做从 $x=1$ 到 $x=z$ 由 $y=\frac{1}{x}$ 所盖的在 OX 軸上的面积. 如图15,由上面的結果,我們可以証明下列重要的事实: 对于任意正数 z_1 和 z_2(就是 $z_1>0, z_2>0$),

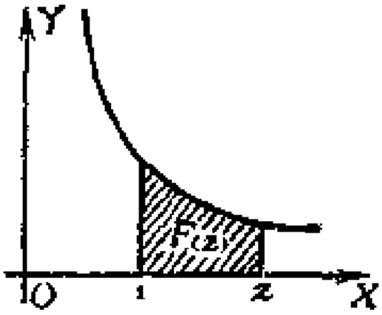


图 15.

总有
$$F(z_1z_2)=F(z_1)+F(z_2). \qquad (\text{I})$$

証明分四步来进行.

(1)若 $z_1>1, z_2>1$,那末,由于

$$\frac{z_1z_2}{z_2}=\frac{z_1}{1},$$

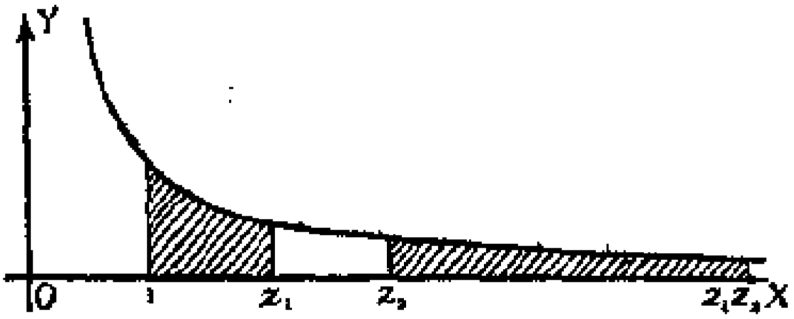


图 16.

可以得到:从 $x=1$ 到 $x=z_1$ 的面积等于从 $x=z_2$ 到 $x=z_1z_2$ 的面积(图16). 而从 $x=z_2$ 到 $x=z_1z_2$ 的面积是

$$F(z_1z_2)-F(z_2).$$

所以
$$F(z_1)=F(z_1z_2)-F(z_2),$$
就是
$$F(z_1z_2)=F(z_1)+F(z_2).$$

(2)若 $z_2=\frac{1}{z_1}$, $z_1>1$,那末由于

$$\frac{z_1}{1}=\frac{1}{\frac{1}{z_1}},$$

所以从 $x=z_1$ 到 $x=1$ 的面积等于从 $x=1$ 到 $x=\frac{1}{z_1}$ 的面积，因之，得到

$$F(\frac{1}{z_1})=-F(z_1).$$

（3）若 $z_1<1$, $z_2<1$，那末 $\frac{1}{z_1}>1$, $\frac{1}{z_2}>1$, $\frac{1}{z_1z_2}>1$，而由（2），我們有

$$F(\frac{1}{z_1})=-F(z_1),\ F(\frac{1}{z_2})=-F(z_2),\ F(\frac{1}{z_1z_2})=-F(z_1z_2).$$

由（1），我們有

$$F(\frac{1}{z_1})+F(\frac{1}{z_2})=F(\frac{1}{z_1z_2}),$$

乘以 -1 后，卽得

$$F(z_1)+F(z_2)=F(z_1z_2).$$

（4）若 $z_1>1$, $z_2<1$，因而 $\frac{1}{z_2}>1$；并且設 $z_1>\frac{1}{z_2}$，那末 $z_1z_2>1$，于是由（1），我們得到

$$F(z_1z_2)+F(\frac{1}{z_2})=F(z_1z_2\cdot\frac{1}{z_2})=F(z_1).$$

但上式就是

$$F(z_1z_2)-F(z_2)=F(z_1).$$

当 $z_1z_2<1$ 时的情形也可以同样証明.

到此为止，我們証明了（I）：对于任意的 $z_1>0$, $z_2>0$，我們有

$$F(z_1)+F(z_2)=F(z_1z_2).$$

有了这个結果，我們进一步来証明：对于任意实数 α, $z>0$，我們有

$$F(z^{\alpha})=\alpha F(z). \qquad (\text{II})$$

証明分五步来进行.

(1)由于

$$F(z_1)+F(z_2)=F(z_1z_2),$$

取 $z_1=z_2=z$,于是有

$$F(z^2)=2F(z).$$

繼續应用上面的公式(I),就有

$$F(z^3)=F(z^2)+F(z)=2F(z)+F(z)=3F(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(z^n)=F(z^{n-1})+F(z)=(n-1)F(z)+F(z)=nF(z).$$

所以(II)对于 α 是正整数时是正确的.

(2)設 k 是負整数,$k=-n$,于是

$$F(z^k)=F(\frac{1}{z^n}),$$

而由以前証明的,我們有

$$F(\frac{1}{z^n})=-F(z^n)=-nF(z)=kF(z).$$

所以(II)对于 α 是整数时都是正确的.

(3)由于当 m 是整数时,

$$F(z_1^m)=mF(z_1)$$

成立,特别取 $z_1=z^{\frac{1}{m}}$,那末 $z=z_1^m$,于是得到

$$F(z)=F(z_1^m)=mF(z_1)=mF(z^{\frac{1}{m}}),$$

这就是
$$F(z^{\frac{1}{m}})=\frac{1}{m}F(z).$$

(4)若 m,n 是整数,那末由(1),(2),(3),我們有

$$F(z^{\frac{n}{m}})=F[(z^{\frac{1}{m}})^n]=nF(z^{\frac{1}{m}})=\frac{n}{m}F(z).$$

所以(Ⅱ)对于 α 是有理数时都成立。

(5)若 α 是无理数，我們一定能够找到二个有理数列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$$

和

$$\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n', \cdots,$$

使得

$$\alpha_n < \alpha < \alpha_n',$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n' = \alpha$$

成立。

这样的二个有理数列是一定能找到的，例如，我們取无理数 α 的漸近分数 $\frac{p_n}{q_n}$，于是我們知道 $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \alpha$，并且是一个递增数列，而以 α 作为极限，$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} > \alpha$，并且是一个递減数列，而以 α 作为极限，我們取 $\alpha_n = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$，$\alpha_n' = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$，就可以了①。

若 $z > 1$，那末从 $F(z)$ 的定义立刻得到

$$F(z^{\alpha_n}) < F(z^{\alpha}) < F(z^{\alpha_n'}),$$

由(4)，这就是

$$\alpha_n F(z) < F(z^{\alpha}) < \alpha_n' F(z),$$

所以

$$\alpha_n < \frac{F(z^{\alpha})}{F(z)} < \alpha_n'.$$

二边取极限，就得到

$$\frac{F(z^{\alpha})}{F(z)} = \alpha,$$

这就是

$$F(z^{\alpha}) = \alpha F(z).$$

同样可以証明 $z \leqslant 1$ 的情形。

这样就完全証明了(Ⅱ)。

有了性質(Ⅱ)，我們就可以得出：函数 $F(z)$ 是以某个常

---

① 关于漸近分数和有理数列的极限，参看这一套丛書中华罗庚：«从祖冲之的圓周率談起»，第一三和一四节。

数 c 作底的对数函数。

可以証明如下：由于

$$z=c^{\log_c z},$$

所以 $$F(z)=F(c^{\log_c z}).$$

由(Ⅱ)，我們知道，这式的右边等于

$$\log_c z\cdot F(c).$$

我們特别选取 c，使 $F(c)=1$，就是說从 $x=1$ 到 $x=c$ 的面积是 1，这是一定能办得到的。于是我們有

$$F(z)=\log_c z.$$

以下我們将要說明，这个 c 是一个极其重要的常数，并指出求出 c 的数值的途径来。

我們来考察图 17。在图 17 中 AEC 和 FBD 都是垂直于 OX 軸的，而 AF，EB 是平行于 OX 軸的。其中 OC 的长是 1，CD 的长是 $\frac{1}{n}$。于是从图形可以看出，曲綫 AB 在 OX 軸上所盖的面积 $ABDCE$ 是

$$\log_c\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

它是小于矩形 $AFDC$ 的面积

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n},$$

而大于矩形 $EBDC$ 的面积

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}.$$

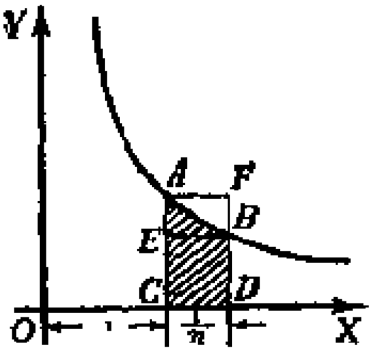


图 17.

所以我們有

$$\frac{1}{n}>\log_c\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

从左边的不等式，得到

$$1 > n\log_c(1+\frac{1}{n}) = \log_c(1+\frac{1}{n})^n,$$

而从右边的不等式，得到

$$(n+1)\log_c(1+\frac{1}{n}) = \log_c(1+\frac{1}{n})^{n+1} > 1,$$

而这就是 $\log_c(1+\frac{1}{n})^{n+1} > 1 > \log_c(1+\frac{1}{n})^n.$

让 $n\to\infty$，我们知道，可以并不困难地证明①：

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

是递增数列，而

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

是递减数列，并且都以 e 作为极限，就是说

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e$$

所以我们知道 c 就是 e. 大家知道，e 是一个无理数，并且是超越数，它等于

$$2.718281828459045\cdots.$$

总结起来，曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在 OX 轴上所盖的面积，从 $x=1$ 到 $x=z$ 的是

$$\log_e z.$$

从 $x=a$ 到 $x=b$ 的是

$$\log_e \frac{b}{a},$$

但 $a>0, b>0$.

我们把 e 作底的对数叫**自然对数**. 在高等数学中所说的对数，一般都是指自然对数，自然对数在高等数学中有它的特殊的重要性.

---

① 关于 $(1+\frac{1}{n})^n$ 和 $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 的极限的证明，一般数学分析的书里都有.

七 面积原理

我們利用以前所获得的結果，繼續应用分割的思想，可以进一步获得很多有趣的結果，这些結果如果用别的方法来研究，有时会感到不是十分容易的。

从第五节的結果，我們知道，当 $m \neq -1$ 时，$y=x^m$ 所描繪的曲綫，在 OX 軸上从 $x=a$ 到 $x=b$ 所盖的面积是

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

（1）先来考虑 $m>-1$ 的情形，由于 $m>-1$，所以由函数 $y=x^m$ 所描繪的曲綫在 OX 軸上从 $x=0$ 到 $x=b$ 所盖的面积应該是存在的（見图 18，所画的是 $-1<m<0$ 的情形），并且等于

$$\frac{b^{m+1}}{m+1}.$$

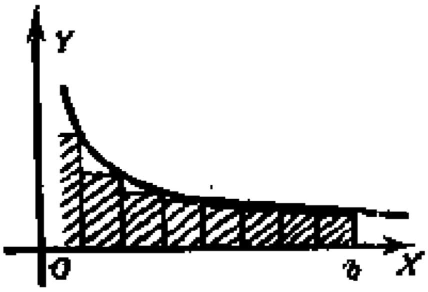


图 18.

从 0 到 b 进行 n 等分，于是每段的长是 $\frac{b}{n}$。跟以前一样，作由 n 个矩形拼凑起来的、跟原来图形相近似的图形，这个近似图形的面积是

$$S_n=\frac{b}{n}\left[\left(\frac{b}{n}\right)^m+\left(\frac{2b}{n}\right)^m+\cdots+\left(\frac{nb}{n}\right)^m\right]$$

$$=\frac{b^{m+1}}{n^{m+1}}[1^m+2^m+\cdots+n^m].$$

S_n 比原图形的面积 S 小（这是指当 $-1<m\leqslant 0$ 时的情形，当 $m>0$ 的时候，S_n 是

$$\frac{b^{m+1}}{n^{m+1}}[1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m],$$

以后討論我們都只对当 $-1<m\leqslant 0$ 的时候来进行，对于 $m>0$

的情形，可以完全相仿的获得，不再一一交代）．而且 n 越大，就跟 S 越接近．由于 $S=\frac{b^{m+1}}{m+1}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1},$$

这个結果是很有意义的，它告訴我們，当 n 很大的时候，

$$1^m+2^m+\cdots+n^m$$

的値跟 $\frac{n^{m+1}}{m+1}$ 差不多．

卽使 m 是正整数的时候，要具体写出

$$1^m+2^m+\cdots+n^m$$

$(m>-1)$ 的値都不太容易．更不必說当 m 不是正整数的情形了．

（2）再来考虑 $m<-1$ 的情形，記 $m=-l$，于是 $l>1$．考察图 19．其中 AB 表示函数 $y=x^m$ 所描繪的曲綫，OC 的长是 1，OD 的长是 n，把 CD $n-1$ 等分，这样每段的长是 1．于是跟以前一样分别作矩形 $CEFG$ 和 $CAHG$ 等等．这样一来图形 $ABDC$ 可以由以下二个图形来近似：第一个图形是由直綫 AC，CD，RD 和折綫 $AHFMK\cdots PR$ 所組成；第二个图形是由直綫 EC，CD，BD 和折綫 $EFJK\cdots PQB$ 所組成．第一个图形的面积显然大于 $ABDC$ 的面积，并且等于

$$1^m+2^m+\cdots+(n-1)^m.$$

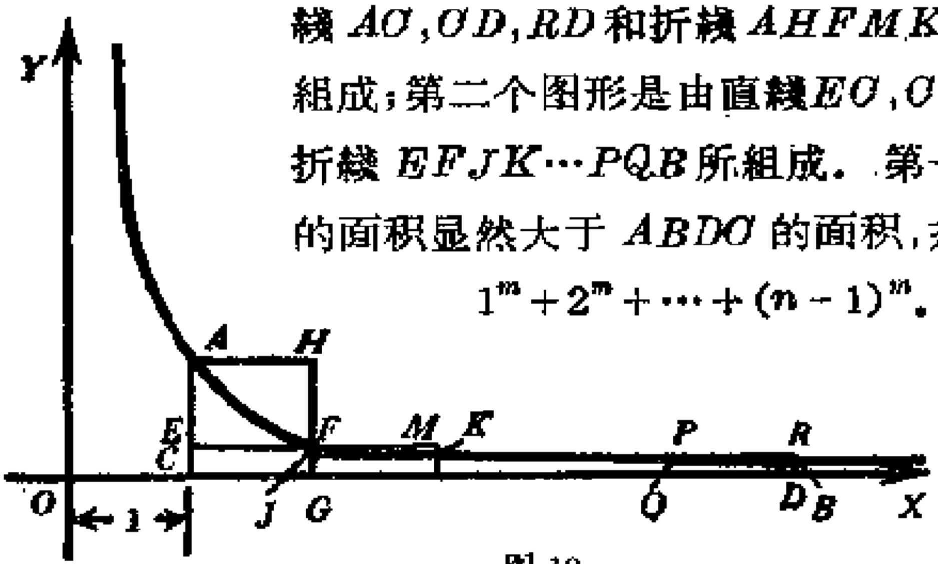


图 19.

第二个图形的面积显然小于 $ABDO$ 的面积，并且等于

$$2^m+3^m+\cdots+n^m.$$

而由第五节的結果，我們知道，图形 $ABDO$ 的面积等于

$$\frac{n^{m+1}-1}{m+1}.$$

于是我們有

$$2^m+\cdots+n^m<\frac{n^{m+1}-1}{m+1}<1^m+\cdots+(n-1)^m.$$

由于 $m=-l$，所以上式就是

$$\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{n^l}<\frac{1-\frac{1}{n^{l-1}}}{l-1}<\frac{1}{1^l}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^l}.$$

这就是

$$\frac{1-\frac{1}{n^{l-1}}}{l-1}<1+\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^l}<1+\frac{1-\frac{1}{n^{l-1}}}{l-1}-\frac{1}{n^l}.$$

讓 $n\to\infty$，由于 $l>1$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^{l-1}}}{l-1}=\frac{1}{l-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{1-\frac{1}{n^{l-1}}}{l-1}-\frac{1}{n^l}=1+\frac{1}{l-1}=\frac{l}{l-1},$$

所以得到

$$1+\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{n^l}+\cdots$$

的值介于 $\frac{1}{l-1}$ 和 $\frac{l}{l-1}$ 之間.

这个結果也是很有意义的。因为即使在 l 是整数的情况下，要求出

$$1+\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{n^l}+\cdots$$

的值也是很不容易的事；甚至在最簡单的情形 $l=2$ 时，要求出这个值来也很費事。在华罗庚教授所写的«从楊輝三角談

起»这本書的最后一节中，就指出：求級数

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

的值是并不簡单的。他在这本書中建議了一个极好的近似計算方法。

所以我們能够依靠分割的办法，估計出級数

$$1+\frac{1}{2^l}+\cdots+\frac{1}{n^l}+\cdots$$

的值在 $\frac{1}{l-1}$ 和 $\frac{l}{l-1}$ 之間是应該認为很有意义的。为了讓讀者进一步了解它的意义，我們在附录中，用了一定的篇幅来証明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

(3)最后我們来考虑 $m=-1$ 的情形。 我們来考察图20. 也是和 $m<-1$ 的情形一样，OC 的长是 1，OD 的长是 n，把 CD $n-1$ 等分，这样每段的长是 1. 而由第六节結果知道，$ABDC$ 的面积是 $\log_e n$. 跟图 19 一样，分别作 $n-1$ 个矩形，于是跟 $m<-1$ 的情形一样，我們可以有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\log_e n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}.$$

记

$$\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log_e n.$$

于是从上式右边不等式，得出 $\gamma_n>0$，从左边不等式，得出

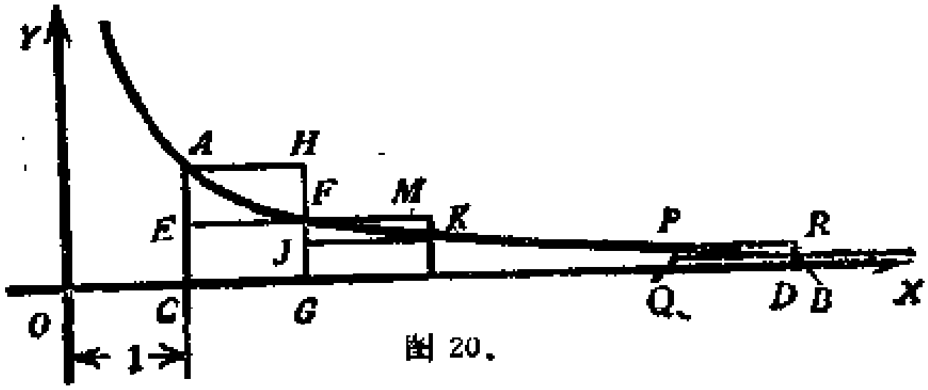


图 20.

$\gamma_n<1-\frac{1}{n}$，所以 γ_n 必須滿足

$$0<\gamma_n<1-\frac{1}{n}.$$

由图 20 可以看出，γ_n 是遞增的，并且是有界的，所以当 n 趋于无穷时，γ_n 的极限是存在的，記做 γ，就是

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\gamma_n.$$

γ 叫做**欧拉(Euler)常数**，它等于

$$0.57721566\cdots.$$

γ 这个数也是一个极其重要的常数。

由这些結果，我們知道，当 n 很大时，

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

和 $\log_e n+\gamma$ 的値差不多。

以上所用的方法，叫做**面积原理**。当然它的最根本的想法还是通过分割，作出近似图形，从而导出一系列的結果来。

八 祖暅原理

在公元五百年初，祖冲之的儿子祖暅，发揮了刘徽割圓的思想，提出了**祖暅原理**，这个原理成为計算面积和体积的有力工具。原理可以陈述如下：

設两个物体夹于平行平面 P 和 Q 之間。若以任意一个平行于 P 和 Q 的平面 R 跟它們相截，截出来的二块面积总是相等，那末两物体的体积相等(图21)。

我們还是应用分割的思想来証明这个原理。用 $n-1$ 个等距离的平行于 P 和 Q 的平面，把物体 A 和物体 B 分别切成

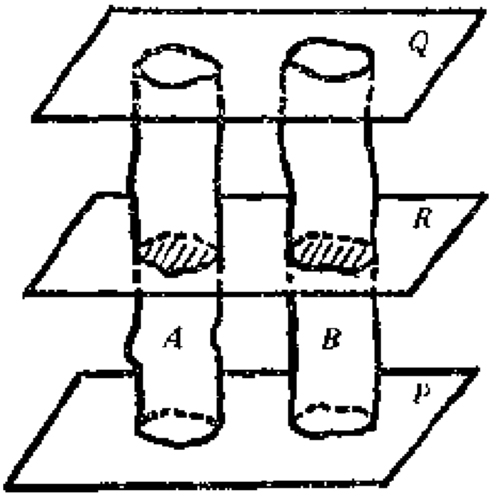


图 21.

等高的 n 片. 对于其中的每一片，我們用柱体来近似它，这个柱体以每片的高做高，以二个底中的上底做底。由于用任意一个平行于 P 和 Q 的平面跟 A, B 相截得出的面积是相同的，因之，物体 A, B 分别切成 n 片之后，跟物体 A 的第 k 片相近似的柱体的体积和跟物体 B 的第 k 片相近似的柱体的体积是相等的。这是因为这二个柱体具有相同的高和相等的底面积的緣故。这样由 n 个柱体組成的物体跟物体 A 相近似，而另一个由 n 个柱体組成的物体跟物体 B 相近似，而且这种分割的方法，也是“割之弥細，所失弥少，割之又割，以至于不可割，則与物体 A、B 相合体而无所失矣”。而当分割的片数趋于无穷，每片的厚度趋于零时，这二个近似物体的体积分别趋于物体 A、B 的体积，但是由以前的論証，这二个近似物体的体积是相等的，所以物体 A 和 B 的体积是相等的。

不难把祖暅原理推广，可以証明：若二物体用平行的平面截出来的图形的面积总是成一定的比，那末这二物体的体积的比也等于这一个比值。

对于面积也可以建立类似的定理。

設二个平面图形 I 和 II 夹在二条平行直綫 p 和 q 之間，若以任意一条平行于 p 和 q 的直綫 r 跟它們相截，截出来的二个綫段的长总是相等，那末这二个图形的面積相等。若截

出来的二个綫段的长成一定的比 k，那末图形Ⅰ的面积和Ⅱ的面积的比也等于 k。

以上这些結果的証明請讀者自己补出来。

以下我們就利用祖暅原理，来計算橢圓的面积和旋轉橢圓体的体积。

什么叫做橢圓？橢圓可以定义做压縮了的圓。考虑一个半径是 a 的圓。設圓心在坐标原点 O 上，把圓上每一点 M' 的縱坐标 KM' 按照一定的比数 $q\,(<1)$ 縮短，得到一点 M，就是說

$$KM:KM'=q,$$

这样把圓 $AB'A_1B'_1$ 压縮成另一个图形 ABA_1B_1(图 22)。由于圓的面积是 πx^2，而

$$MM_1:M'M'_1=q,$$

所以由祖暅原理，橢圓 ABA_1B_1 的面积是 $q\pi a^2$。記 $qa=b$，那末 ABA_1B_1 的面积是 πab，讀者可以看出 OB 的长就是 b，并且橢圓 ABA_1B_1 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

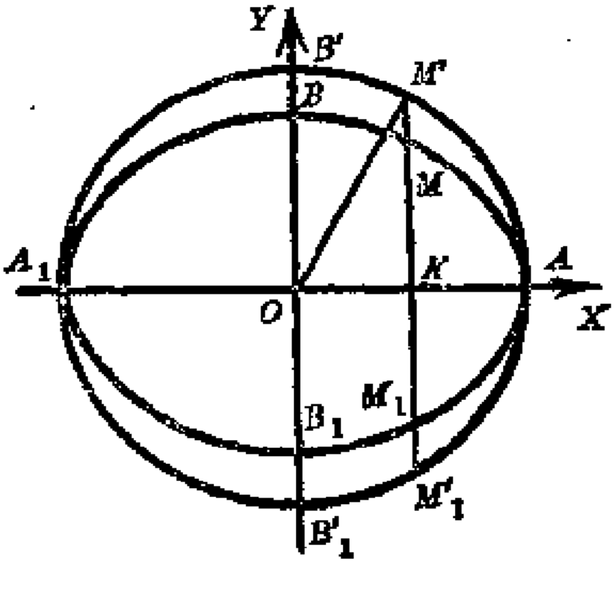


图 22.

这是因为，設 M 点的坐标是 (x,y)，考虑 OM' 的长，一方面是 a，一方面是 $\sqrt{\overline{OK}^2+\overline{KM'}^2}$。但

$$\overline{OK}^2=x^2,\ \overline{KM'}^2=(\frac{y}{q})^2,$$

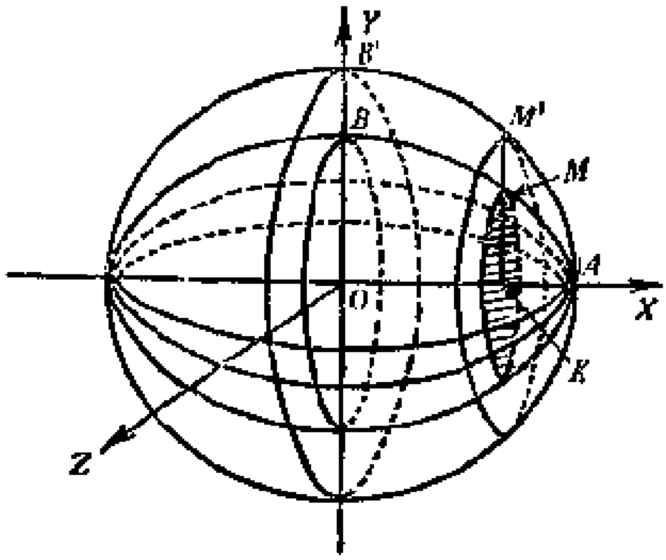


图 23.

所以

$$a^2 = x^2 + \frac{y^2}{q^2},$$

但 $q = \frac{b}{a}$，代入，就得到上面这个方程。

以 OX 軸做軸，把橢圓旋轉成旋轉橢圓体(图23)。于是圓相应地旋轉成球。垂直于 OX 軸作平面，切球得到一个圓，切橢圓体也得到一个圓，这二个圓的半径的比是 $KM : KM' = q$，所以二个圓面积的比是 q^2。而球的体积是 $\frac{4}{3}\pi a^3$。所以根据祖暅原理，旋轉橢圓体的体积是

$$\frac{4}{3}\pi a^3 q^2 = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

九 面积的近似計算

以上介紹了一些求面积或体积的方法，只是对一部分比較簡单而有規則的图形有效。应該說，对于大部分图形来說，不論分割的办法怎么巧妙，它們的面积或体积的确切数值是求不出来的，即使应用高等数学的工具也是这样。因之，我們要想办法求出它的近似値来。而在实际应用的时候，我們能够求得一定精确程度的近似値，也就足够了。

怎样来求得图形的面积或体积的近似値呢？这有很多办法，而且目前还在不断創造新的办法。这一节只介紹几种最

簡单的求面积的近似值的办法。可以看出，这些办法的想法还是从刘徽割圓的思想演化出来的。

(1)矩形公式 如果已知一根曲綫 $y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$。要求它和 OX 軸之間的面积(图 24)。把 ab n 等分，設分点是

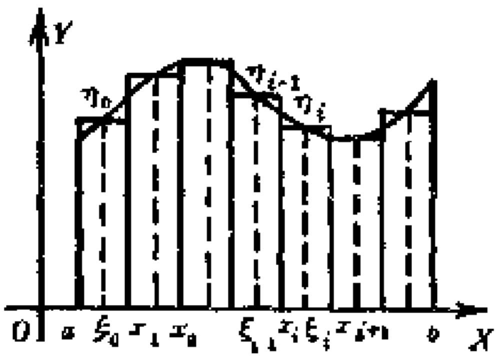


图 24.

$$(a=)x_0, x_1, \cdots, x_n(=b).$$

設 x_i 和 x_{i+1} 之間的中点是 ξ_i，从 ξ_i 作垂直于 OX 軸的直綫，交曲綫 $y=f(x)$ 于 η_i，过 η_i 作平行于 OX 軸的直綫，于是我們得到 n 个矩形，第 i 个矩形的面积是

$$\frac{b-a}{n}f(\xi_{i-1}).$$

于是作为要求的面积的近似值——由 n 个矩形所組成的图形的值——是

$$\frac{b-a}{n}[f(\xi_0)+f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_{n-1})].$$

当然 n 越大，所求得的近似值越精确。

(2)梯形公式 在上一問題中，我們可以用梯形来代替矩形，方法如下：从綫段 ab 的分点

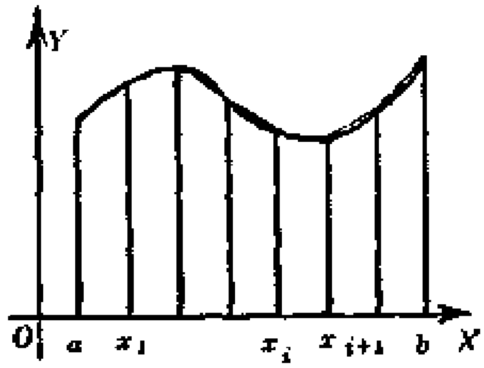


图 25.

$$(a=)x_0, x_1, \cdots, x_n(=b)$$

作垂直綫，交曲綫于 $n+1$ 个点，把相邻的点二二相联，于是得到 n 个梯形(图 25)；其中第 i 个梯形的面积是

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}[f(x_{i-1})+f(x_i)].$$

于是，如果我們把这 n 个梯形面积的和作为要求的面积的近似值的話，那末它等于

$$\frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})\right].$$

如果在实际应用时，我們只知道曲綫的形状而不知道曲綫的方程，那末我們可以事先准备一张印有等距离 d 的平行綫的透明紙，把紙蒙在图紙上，使透明紙的某二条綫切于要求面积的图形的边界(图 26)，这一批平行綫被图形所截取的长度是

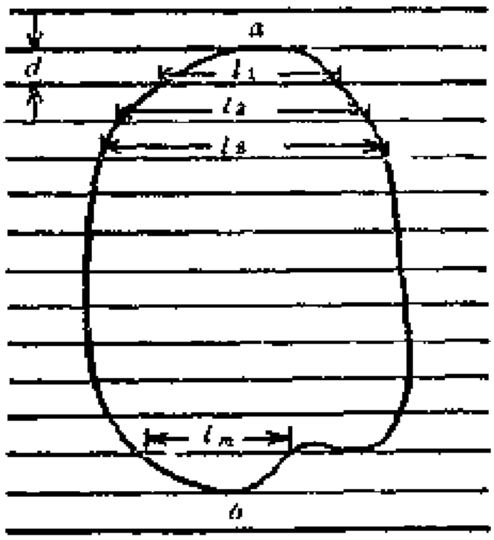


图 26.

$$l_1, l_2, \cdots, l_m.$$

于是我們把

$$d(l_1+l_2+\cdots+l_m)$$

作为这个图形的近似面积。这是因为曲綫所围的图形被 m 根平行綫划分成 $m+1$ 条。其中第一条的面积我們用三角形的面积

$$\frac{1}{2}d\,l_1$$

来近似它，最后一条的面积我們用三角形的面积

$$\frac{1}{2}d\,l_m$$

来近似它，其他的每一条用梯形的面积

$$\frac{1}{2}d(l_i+l_{i+1})$$

来近似它，把这些一齐加起来，就得到了由曲綫所围的图形的近似面积，是：

$$d(l_1+l_2+\cdots+l_m).$$

当然，d 越小，所得的近似面积越精确.

(3)**辛卜生公式** 如果我們用

$$\frac{b-a}{6n}\{[f(a)+f(b)]+2[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})]$$
$$+4[f(\xi_0)+\cdots+f(\xi_{n-1})]\}$$

来作为图形 24 中曲綫和 OX 軸之間的面积的近似值，那末可以得到比前二种方法更精确的結果. 这个公式叫做辛卜生(Simpson)公式.

設从 ab 之間的分点 x_i 作 OX 軸的垂直綫，交曲綫于 p_i，作以竖直方向做軸、过 p_i、η_i，p_{i+1} 三点的拋物綫(图27). 由这拋物綫和 $p_i x_i$，$p_{i+1} x_{i+1}$，$x_i x_{i+1}$ 所圍成的图形的面积是

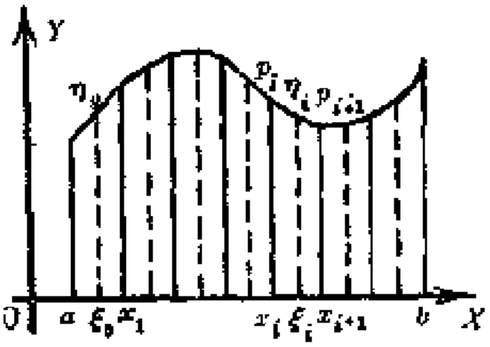


图 27.

$$\frac{b-a}{6n}[f(x_i)+4f(\xi_i)+f(x_{i+1})].$$

以这个面积作为由曲綫 $p_i p_{i+1}$ 和直綫 $p_i x_i$，$p_{i+1} x_{i+1}$，$x_i x_{i+1}$ 所圍成的图形的面积的近似值，然后把这些面积一齐加起来就得到辛卜生公式.

这里我們只說明辛卜生公式，而并未予以証明.

同样的，在图 26 中，我們可以用

$$\frac{1}{3}(l_{i-1}+4l_i+l_{i+1})d$$

来代表第 i 条和第 $i+1$ 条加在一起的近似面积，然后加起来，可以求得整块近似面积.

(4)**方格法** 已給一条閉曲綫(图28)，用一张方格紙，方格的边长是 d，放在曲綫所圍的图形上，把格子点落在图形内

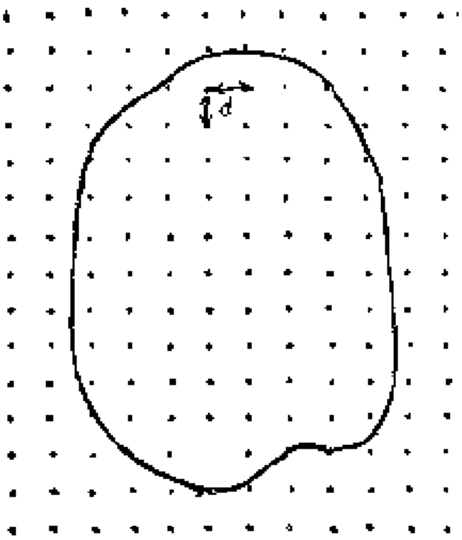


图 28.

的个数乘上d^2，就可以作为面积的近似值。

当然求面积的近似值的方法是很多的，这里不再一一介紹了，有兴趣的讀者可以參看普通的微积分的書籍。如果希望了解进一步的理論，可以參看华罗庚、王元合著的《积分的近似計算》① 以及这一套丛書中閔嗣鶴所著的《格点和面积》等优秀著作。

一〇 体积的近似計算

这一节，我們要介紹几种求体积的近似值的方法。要求体积的近似值的問題是很多的，如求水庫容积，估算矿藏儲量等等。这里介紹的几种方法，都沒有給出物体的方程，而是通过直接計算得来的。

(1)**簡易方法** 例如我們要計算某一水庫的容积。一共測得水庫n个点的深度$h_1, h_2, \cdots, h_n$。又測得水庫的水平面的面积B。那末它的容积V可以B乘以平均高度来計算，就是

$$V = B\frac{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}{n}.$$

有时，我們可以对上面这个公式作适当修正，例如我們一共測

① 《积分的近似計算》，华罗庚、王元合著，科学出版社出版。

得 n 个点的深度(图 29),其中 k 个点位于水庫边上,設它們的深度是

$$h_1, h_2, \cdots, h_k,$$

图 29.

那末我們用

$$V = B\frac{\frac{1}{2}(h_1+h_2+\cdots+h_k)+h_{k+1}+h_{k+2}+\cdots+h_n}{\frac{1}{2}k+n-k}$$

$$= B\frac{h_1+h_2+\cdots+h_k+2(h_{k+1}+h_{k+2}+\cdots+h_n)}{2n-k}$$

来計算容积.

这种修正是根据这样的想法,認为水庫边上的点的影响范围只有中間的点的一半.

图 30.

(2)**方格法** 假如沒有修水庫前,我們有了一幅画有等高綫的地形图,高程差是 h,地图上的一圈,实际上便是一定高程的水平面(图30).

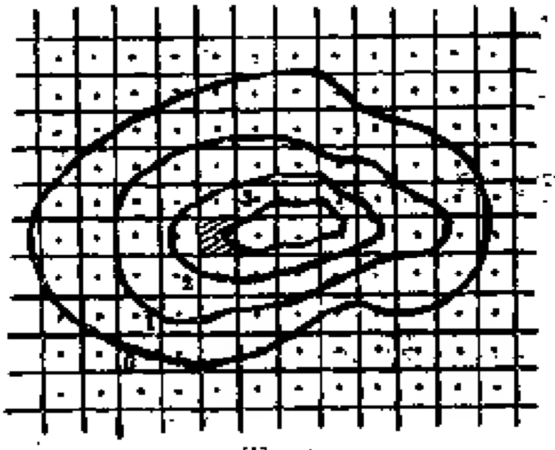


图 31.

在等高綫图上,打上边长是 d 的方格,利用等高綫图估計一下每一个方格中心的深度,例如图 31 中有阴影的一格的深度是 2.8,那末水庫的容积 V 可以用所有落在等高綫图中的方格的中

点的深度的和乘以 d^2 来計算，卽

$$V=(h_1+h_2+\cdots+h_m)d^2.$$

这里 $h_1, h_2, \cdots, h_m$ 是落在等高綫图中各方格的中点的深度。

（3）**截錐公式** 設有一高是 H，底面积是 A 的錐体，那末，錐体的体积是

$$\frac{1}{3}HA.$$

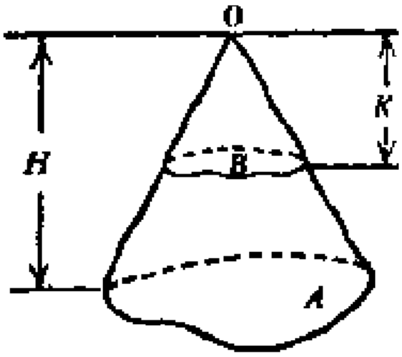


图 32.

平行于底跟頂点距离是 K 作一平面，横截錐体，得到面积 B（图 32），那末

$$K:H=\sqrt{B}:\sqrt{A}.$$

关于这二件事我們不在这里証明了。

用这个做基础，如果 A, B 之間的距离是 h，卽

$$H-K=h,$$

那末，由 B 和 A 所隔成的截錐（圓台）的体积是

$$\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}).$$

这是因为
$$H=K+h,$$

$$K:K+h=\sqrt{B}:\sqrt{A},$$

所以
$$K\sqrt{A}=(K-h)\sqrt{B},$$

卽
$$K=\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}.$$

而以 K 做高，B 做底的錐体的体积是

$$\frac{1}{3}\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}\cdot B,$$

以 H 做高，A 做底的錐体的体积是

$$\frac{1}{3}\left(\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}+h\right)\cdot A=\frac{h}{3}\frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{B}},$$

于是二者的差是

$$\frac{h}{3}\frac{(A\sqrt{A}-B\sqrt{B})}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}=\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}).$$

利用这个公式，我們来估計水庫在相邻二等高綫所表示的水位之間的容积，以 A, B 各表示上，下二等高綫所包围的截面，它們的面积也記作 A, B(图 33)，二截面之間的高度差是 h，于是我們把由 A, B所包的容积近似地看作一个截錐(圓台)的容积，那末根据上面那个公式，这应該等于

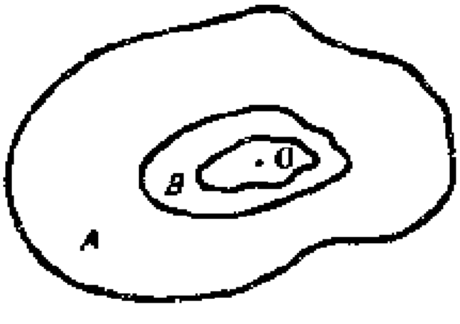


图 33.

$$\frac{h}{3}(A+B+\sqrt{AB}).$$

把算出来的容积一片一片地相加起来，就得到水庫的容积的近似值．設水庫的等高綫图的 $n+1$ 条等高綫所围成的截面依次是 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，其中 S_n 就是制高点 O，它們的面积也分别是 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，那末水庫的容积的近似值是：

$$V_1=h\left[\frac{S_0+S_n}{3}+\frac{2}{3}(S_1+S_2+\cdots+S_{n-1})\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}(\sqrt{S_1S_2}+\cdots+\sqrt{S_{n-1}S_n})\right],$$

这个公式叫做截錐公式.

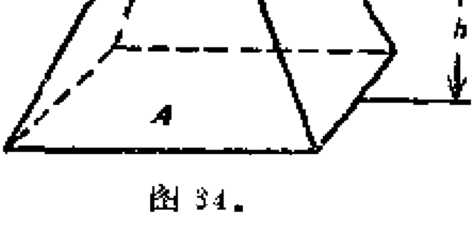


图 34.

(4)梯形公式 設有一梯形(稜台)高是 h，上底的面积是 B，下底的面积是 A (图 34)，那末这样的梯形(稜台)的近似体积是

$$\frac{h}{2}(A+B).$$

利用这个公式我們来估計水庫在相邻二等高綫所表示的水位之間的容积．如图 33，以 A，B 各表示上，下二等高綫所包围的截面，它們之間的高度差是 h，于是我們把由 A，B 所包的容积近似地看作一个梯形（稜台）的容积，那末根据上面那个公式，这应該等于

$$\frac{h}{2}(A+B).$$

把算出来的容积一片一片地相加起来，就得到水庫容积的近似值．設水庫的等高綫图的 $n+1$ 条等高綫所围成的截面依次是 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，其中 S_n 就是制高点 O，它們的面积也分别是 $S_0, S_1, \cdots, S_n$，那末水庫容积的近似值是：

$$V_2 = h\left(\frac{S_0+S_n}{2}+S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}\right).$$

（5）**柏烏曼公式**　如图 35，O 是制高点，A，B 是上下二等高綫所包围的截面．从制高点 O 出发，作放射綫 OP，这射綫在等高綫图上 A，B 之間的长度是 l．另作一图（图 36）；取一点 O'，和 OP 同方向，作 $O'P'$，取 $O'P'=l$，当 P 沿 A 的周界走一圈时，P' 也得一图形，这图形的面积記作 $T(A,B)$，叫做柏烏曼（Бауман）改正数．

我們用

$$h\left[\frac{1}{2}(A+B)-\frac{T(A,B)}{6}\right]$$

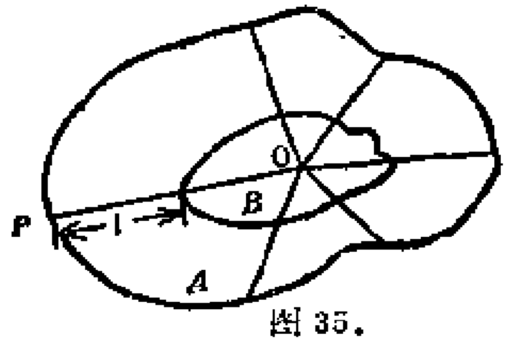


图 35.

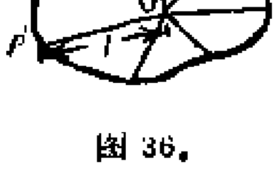


图 36.

来替代(4)中的梯形(稜台)的体积,从而得到水庫容积的另一个近似值:

$$V=h\left\{\left(\frac{S_0+S_n}{2}+S_1+\cdots+S_{n-1}\right)-\frac{1}{6}\left[T(S_0,S_1)+\cdots+T(S_{n-1},S_n)\right]\right\},$$

这个公式叫做柏烏曼公式.

截錐公式,梯形公式和柏烏曼公式之間,有以下的关系:

$$V\leqslant V_1\leqslant V_2.$$

当而且只当物体是截錐,这个錐体的頂点到底面 A 的垂直綫通过制高点 O 时,$V=V_1$;当而且只当上下二底的面积相等,即 $A=B$ 时,$V_1=V_2$.

这里我們不再給上面这些結果作出証明了,一般說来,柏烏曼公式比其他二个公式更精确些.

关于这方面的进一步的結果,請讀者参看华罗庚、王元合著的«积分的近似計算»一書.

一一 結 束 語

这是一本通俗小册子,因之,很多地方并沒有給出严格的数学証明,而只是依靠图形来直观地說明問題,例如:書中多次提到的"割之弥細,所失弥少,割之又割,以至于不可割,則与…相合体而无所失矣".在这本小册子中,只依靠图形的直观,在将来高等数学中要給予严格的証明. 又如我們分割的办法可以作一个近似图形比原来的图形小,也可以比原来的图形大,可以用这种办法来分割,也可以用那种办法来分割.怎样知道这些方法所得到的結果是一样的呢?这里也并沒有

給予严格的数学証明而只是依靠直观。 此外，如什么叫做物体的体积和图形的面积，在将来都应該严格的定义。 在这本小册子中所应用的极限过程，也沒有作严格的証明. 至于最后二节的內容，其中更有很多沒有 証 明的地方，例如，怎样知道在这二节中举出的这些公式是近似公式？怎样来定出这些近似公式的誤差程度？等等。

我們之所以这样做，只是希望通过这本小册子中所举出的一些最簡单的例子，来突出刘徽割国的思想所給予我們的启发。 这个思想实質上孕育着近代积分学的最基本的、最朴素的思想，而这是由萊布尼茲 (Leibniz, 1646–1716) 和牛頓 (Newton, 1642–1727) 所总結出来的。

在这本小册子中，我們只是应用刘徽割圓的思想討論了一些面积和体积的問題。 事实上，这种想法不仅可以用来討論面积和体积的問題，而且还可以用来处理很多别的問題，例如在中学里我們学过的力学中的功，压力，距离等等以及其他的一些物理量，都可以应用这个思想来求得一些問題的答案.

当然我們不去把属于积分学范疇的一些結果在这里叙述，可是我希望讀者通过这本小册子，也許对将来学习高等數学有所裨益。

附　录

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$的証明

在这个附录中，我們来証明

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

証明分几步。

首先我們可以利用数学归納法来証明棣美弗(De Moivre)公式：

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha,$$

这里 k 是正整数，$i=\sqrt{-1}$。这个証明在这里就不講了。

把棣美弗公式展开，取它的虚数部分，就得：

$$\sin k\alpha=k\sin\alpha\cos^{k-1}\alpha-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\sin^3\alpha\cos^{k-3}\alpha+\cdots$$

而这就是

$$\sin k\alpha=\sin^k\alpha\left(k\operatorname{ctg}^{k-1}\alpha-\frac{k(k-1)(k-2)}{6}\operatorname{ctg}^{k-3}\alpha+\cdots\right).$$

特别取 $k=2n+1$ 和 α 等于

$$\frac{\pi}{2n+1},\ \frac{2\pi}{2n+1},\cdots,\frac{n\pi}{2n+1},$$

由于 $\sin(2n+1)\alpha=0$，$\sin\alpha\neq0$，所以得到：

$$(2n+1)\operatorname{ctg}^{2n}\alpha-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}\operatorname{ctg}^{2n-2}\alpha+\cdots=0.$$

就是說　　$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1},\ \operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1},\cdots,\ \operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$

是方程式

$$(2n+1)x^n-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}x^{n-1}+\cdots=0$$

的根；由方程式的根和系数之間的关系，知道

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{ctg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cdots+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6(2n+1)}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

由于 $$\operatorname{cosec}^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha+1,$$

所以由上式还得到：

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cdots+\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}$$

$$=\frac{n(2n-1)}{3}+n=\frac{n(2n+2)}{3}.$$

利用第四节中的方法，我們可以証明：当$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，

$$\operatorname{tg}\alpha>\alpha>\sin\alpha,$$

而这就是 $$\operatorname{cosec}\alpha>\frac{1}{\alpha}>\operatorname{ctg}\alpha.$$

应用前面所証明的二个等式，于是我們就有

$$\frac{n(2n-1)}{3}<\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2+\left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2<\frac{n(2n+2)}{3},$$

而这就是

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$<\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right).$$

讓 $n\to\infty$，就得到

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

应用同样的方法，我們来考察方程式的第三項的系数，可以証明

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

同样的，还可以証明

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots+\frac{1}{n^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945},$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\cdots+\frac{1}{n^8}+\cdots=\frac{\pi^8}{9450},$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\cdots+\frac{1}{n^{10}}+\cdots=\frac{\pi^{10}}{93555},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\cdots+\frac{1}{n^{12}}+\cdots=\frac{691\pi^{12}}{638512875},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$